a

Dodawanie

Zgodnie z obietnicą zaczniemy poznawać *operacje*, zwane też *działaniami* na liczbach. „Przeprowadzanie operacji” w matematyce znaczy mniej więcej tyle, co przyrządzanie zupy studenckiej. Wrzucasz dowolne składniki i patrzysz, co wyszło. Przyjrzyjmy się takiej operacji, jak dodawanie liczb naturalnych.

Dodawanie, czyli łączenie składników

Intuicje

Dodawanie najprościej zrozumieć jako wizualne[[1]](#footnote-1) łączenie obiektów. Rozłóżmy na stole kulki[[2]](#footnote-2).

Kulki rozłożyły się na dwie widoczne grupy. W grupie po lewej stronie widzimy dwie kulki. W grupie po prawej stronie są cztery kulki. Kiedy policzymy po kolei wszystkie widoczne kulki, stwierdzimy, że jest ich sześć. Na tym polega właśnie magia dodawania. 2 kulki oraz 4 kulki to to samo, co 6 kulek. Matematycy nie lubią używać zbyt wielu słów, więc zapiszą to spostrzeżenie krócej:

2 kulki + 4 kulki = 6 kulek

Znaczek + rozumiemy jako „oraz”, a znaczek = jako „to to samo, co”. Znaczki te to pierwsze *symbole* matematyczne, z jakimi masz przyjemność[[3]](#footnote-3) się spotkać. Bardziej profesjonalnie symbol + czytamy jako „dodać”. Mniej profesjonalnie jako „plus”. Symbol = czytamy jako „równa się”. Ma on dużo szerszą i ogólniejszą rolę, niż tylko opowiadanie o łączeniu kulek. Symbol = mówi tyle, że po jego lewej stronie jest dokładnie to samo, co po prawej stronie. Można na przykład zapisać, że

2 kulki = 2 kulki

Pytanie tylko po co. Wróćmy lepiej do kulek, żeby oswoić się z nowym zapisem.

Dwie kule po lewej, dwie kule po prawej, razem widzimy 4 kule.

2 kule + 2 kule = 4 kule

Trzy kule po lewej, cztery kule po środku, sześć kul po prawej. Razem 13 kul.

3 kule + 4 kule + 6 kul = 13 kul

Jak już mówiliśmy, liczby w matematyce nie muszą odnosić się do żadnych konkretnych przedmiotów, takich jak kule. Istnieją one niezależnie, po prostu jako liczby. Powyższe przykłady można zapisać ogólniej, bez powiązania z kulami:

2 + 4 = 6

2 + 2 = 4

3 + 4 + 6 = 13

Jeśli w trakcie nauki dodawania napotkasz trudności, zawsze możesz wyobrazić lub narysować sobie odpowiedni obrazek z kulkami i policzyć je jedna po drugiej.

Dodawanie możemy rozumieć także jako powiększanie jednej liczby o drugą. Jeśli pasterz miał dziesięć owiec i postanowił dokupić siedem owiec, to teraz ma siedemnaście owiec.

10 + 7 = 17

Jeśli pan Janusz zjadł na śniadanie 3 golonki, na obiad 4 golonki, a na kolację 2 golonki,[[4]](#footnote-4) to w ciągu całego dnia zjadł 9 golonek.

3 + 4 + 2 = 9

Jeśli 5 razy w ciągu dnia wypijesz dwie szklaneczki[[5]](#footnote-5), to łącznie wypijesz 10 szklaneczek.

2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10

W swoim czasie uzupełnię definicję formalną

Nazewnictwo

Intuicje

Być może kiedyś w życiu napotkasz następujący problem:

Jaś zjadł 3 jabłka, a Małgosia 5 jabłek. Ile jabłek zjadły razem[[6]](#footnote-6) dzieci?

Aby znaleźć odpowiedź na to intrygujące pytanie, musimy wykonać dodawanie, czyli *dodać* liczby 3 i 5. Gdy podołamy wyzwaniu i otrzymamy w odpowiedzi 8, dostaniemy *wynik* dodawania. W ogólności wykonanie dowolnego działania na liczbach zwraca wynik działania. W przypadku dodawania liczby, które dodajemy, nazywamy *składnikami*, zaś otrzymany wynik nazywamy *sumą*. Czasami samo dodawanie nazywamy też *sumowaniem*.

składnik + składnik = suma

* W działaniu 2 + 3 = 5 składnikami są 2 i 3, a wynikiem (sumą) 5
* W działaniu 3 + 5 + 7 = 15 składnikami są 3, 5 i 7, a wynikiem (sumą) 15
* W działaniu 14 = 9 + 5 składnikami są 9 i 5, s wynikiem (sumą) 14.

Własności dodawania

Rozszerzenie

Czyli co można powiedzieć o dodawaniu[[7]](#footnote-7). Przyjrzyjmy się ponownie kulkom:

Dodając kulki po lewej stronie do kulek po prawej stronie, otrzymamy

4 + 5 = 9

Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, by w porywie szaleństwa kulki po prawej stronie dodać do kulek po lewej stronie:

5 + 4 = 9

Jak widać, nie ma znaczenia, w jakiej kolejności dodamy do siebie liczby, a wynik otrzymamy taki sam. Z tego powodu mówimy, że dodawanie jest *przemienne*.

Gdy do dwóch kulek dodamy jedną, otrzymamy 3 kulki. Jeśli do tych trzech kulek dołożymy jeszcze 6, to będziemy mieli 9 kulek.

1 + 2 = 3

3 + 6 = 9

Patrząc z innej strony, gdy do sześciu kulek dołożymy jedną, otrzymamy 7 kulek. Dołożenie do tych 7 jeszcze dwóch da nam razem 9 kulek.

6 + 1 = 7

7 + 2 = 9

Kiedy dodajemy więcej niż dwa składniki, możemy sumować je parami w dowolnej kolejności. Dlatego mówimy, że dodawanie jest *łączne*.

Dodawanie w słupku

Warsztat

Powiedzieliśmy trochę o samej teorii dodawania, ale cały czas nie wiemy, jak to robić w praktyce. Kiedy ktoś zapyta nas o wynik dodawania 3 + 4, to możemy w lewej ręce wyciągnąć 3 palce, w prawej 4 palce i policzyć, że razem wyciągnęliśmy 7 palców. Dodawanie liczb jednocyfrowych nie jest dużym wyzwaniem, szczególnie kiedy nabierze się wprawy. Gdyby ktoś napotkał jednak problemy z dodawaniem liczb rzędu 8 i 9, spieszymy z pomocą i podsuwamy zgrabną tabelkę, zwaną *tabliczką dodawania*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Jeśli chcemy poznać wynik dodawania 8 + 9, szukamy ósemki u góry wśród pogrubionych liczb, a dziewiątki po lewej wśród pogrubionych liczb. Następnie jedziemy wzrokiem wzdłuż odpowiedniego rzędu i odpowiedniej kolumny i we wspólnej komórce znajdujemy wynik 17.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Ponieważ dodawanie jest przemienne, możemy równie dobrze znaleźć dziewiątkę u góry i ósemkę po lewej – znowu trafimy na wynik 17.

Większy problem z dodawaniem pojawia się wtedy, gdy chcemy dodać liczby dwucyfrowe lub jeszcze większe. Oczywiście moglibyśmy rozszerzyć tabliczkę dodawania dalej niż do dziewiątki, jednak… bądźmy realistami. Bardziej pomocna okazuje się technika *dodawania w słupku* zwana też *dodawaniem pisemnym*. Najlepiej nauczmy się jej na przykładzie – bądźmy odważni i spróbujmy dodać 127 oraz 32. Piszemy dwie liczby jedna pod drugą tak, by cyfry jedności, cyfry dziesiątek, cyfry setek itd. znajdowały się jedna pod drugą (wyrównujemy do prawej) i podkreślamy tak zapisane liczby. Pod kreską wkrótce pojawi się wynik.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 7 |
| + |  | 3 | 2 |
|  |  |  |  |

Poszukiwanie wyniku polega teraz na tym, by dodawać do siebie kolejne cyfry[[8]](#footnote-8) (jedności do jedności, dziesiątek do dziesiątek itd. – w tej kolejności), a wynik dodawania zapisywać pod kreską.

* 7 + 2 = 9, więc pod siódemką i dwójką piszemy 9.
* 2 + 3 = 5, więc pod dwójką i trójką piszemy 5.
* 1 nie ma swojego towarzysza, więc przepisujemy ją w niezmienionej postaci.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 7 |
| + |  | 3 | 2 |
|  | 1 | 5 | 9 |

Wynikiem dodawania 127 + 32 jest 159. Nie było tak źle, prawda? Spróbujmy się zmierzyć z trochę trudniejszym przypadkiem – dodajmy 256 i 947. Zaczynamy tak samo:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  |  |  |  |

Teraz dodajmy szóstkę do siódemki. Otrzymujemy 13 – pojawia się problem, bo przecież nie zapiszemy dwóch cyfr pod szóstką i siódemką. Zrobimy więc tak – rozbijmy 13 na dwie cyfry, pod szóstką i siódemką napiszemy 3, a 1 przenieśmy do następnej kolumny.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  |  |  | 3 |

Teraz dodajemy wszystkie trzy cyfry: 1, 5 i 4 – dostajemy 10. Ponieważ wynik jest dwucyfrowy, w tej kolumnie piszemy 0, a 1 przenosimy dalej.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  |  | 0 | 3 |

Dodajemy 1 + 2 + 9. Wynik 12 rozbijamy na 2 i 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  | 2 | 0 | 3 |

Przeniesiona jedynka jest samotna, więc przepisujemy ją bez zmian.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
| 1 | 2 | 0 | 3 |

Dostaliśmy wynik: 256 + 947 = 1203. Jeśli dodawanie w słupku sprawia wrażenie czarnej[[9]](#footnote-9) magii, prześledź jeszcze kilka przykładów:

* 1256 + 391 = 1647

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |  |
|  | 1 | 2 | 5 | 6 |
| + |  | 3 | 9 | 1 |
|  | 1 | 6 | 4 | 7 |

* 915 643 + 200 569 = 1 116 212

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |
|  | 9 | 1 | 5 | 6 | 4 | 3 |
| + | 2 | 0 | 0 | 5 | 6 | 9 |
| 1 | 1 | 1 | 6 | 2 | 1 | 2 |

* 2451 + 81362 + 5098 = 88911

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 1 |  |
|  |  | 2 | 4 | 5 | 1 |
|  | 8 | 1 | 3 | 6 | 2 |
| + |  | 5 | 0 | 9 | 8 |
|  | 8 | 8 | 9 | 1 | 1 |

Rozszerzenie

Być może jesteś ciekaw, dlaczego magiczna metoda dodawania w słupku jest matematycznie poprawna. Czemu jakieś dodawanie cyfr w kolumnach i przepisywanie jedynek do kolejnej kolumny w ogóle działa? W pierwszym przykładzie 127 + 32 = 159 stosunkowo łatwo to zrozumieć. 127 można zapisać jako 100 + 20 +7, a 32 jako 30 + 2. W takim razie

127 + 32 = 100 + 20 + 7 + 30 + 2

Ponieważ dodawanie jest przemienne, nie ma znaczenia kolejność zapisania składników, więc:

100 + 20 + 7 + 30 + 2 = 100 + 20 + 30 + 7 + 2

Ponieważ dodawanie jest łączne, możemy zająć się tą sumą tak, jak nam wygodnie:

100 + 20 + 30 + 7 + 2 = 100 + 50 + 9 = 159

W gruncie rzeczy to, co uczyniliśmy, to właśnie sumowanie cyfr jedności (7 + 2), dziesiątek (20 + 30) i setek (100), by otrzymać wynik końcowy. Tak jak w słupku. Zobaczmy jeszcze jak działa 256 + 947 = 1203:

256 + 947 =

= 200 + 50 + 6 + 900 + 40 + 7 =

= 200 + 900 + 50 + 40 + 6 + 7 = ustalamy wygodną kolejność składników

= 200 + 900 + 50 + 40 + 13 = dodajemy cyfry jedności

= 200 + 900 + 50 + 40 + 10 + 3 = rozbijamy 13 na dwie cyfry

= 200 + 900 + 100 + 3 = dodajemy cyfry dziesiątek

= 1200 + 3 = dodajemy cyfry setek

= 1000 + 200 + 3 = rozbijamy 12 na 1 i 2

1203

Dla przejrzystości zapisaliśmy to działanie w kilku linijkach. Kiedy przenosimy nasze obliczenia do następnej linijki w miejscu znaku równości, zwyczajowo zapisujemy = dwa razy: na końcu poprzedniej linijki i na początku nowej.

Jeżeli wykazujesz skrajny cynizm[[10]](#footnote-10), będziesz oczekiwał bardziej formalnego wyjaśnienia zagadki dodawania w słupku. Proszę bardzo:

Dowód

[wymagana znajomość tematu: Algebra]

uzupełnię w odpowiednim czasie

1. Takie że widzisz [↑](#footnote-ref-1)
2. Jak prawdziwi matematycy [↑](#footnote-ref-2)
3. Czujesz tę radość? [↑](#footnote-ref-3)
4. To ile czasu spędzi w toalecie? [↑](#footnote-ref-4)
5. soku [↑](#footnote-ref-5)
6. Tak naprawdę nie wiadomo. Niektóre jabłka mogły zjeść osobno. [↑](#footnote-ref-6)
7. Oprócz tego, że jest świetną zabawą [↑](#footnote-ref-7)
8. Dobrze, masz rację. Dodajemy do siebie liczby reprezentowane przez cyfry. Lepiej Ci? [↑](#footnote-ref-8)
9. Masz problem z poprawnością polityczną? [↑](#footnote-ref-9)
10. To znaczy, że jesteś prawdziwym matematykiem. [↑](#footnote-ref-10)